

DER STOSSWELLENKNALL BEIM ÜBERSCHALLFLUG

K. OSWATITSCH

*Institut für Theoretische Gasdynamik der
Deutschen Versuchsanstalt für Luft—u. Raumfahrt
Aachen, Germany*

ABSTRAKT

Man verfügt heute demnach über eine Methode, mit welcher die verschiedenen Probleme des Entstehens und Vergehens von Stosswellen gelöst werden können. Der Arbeitsaufwand liegt dabei nicht wesentlich über jenem einer Anwendung der akustischen Theorie, nur liefert die letztere keine Stosswellen. Freilich ist gerade im Zusammenhang mit der richtigen Fassung der Randbedingungen noch nicht jede Schwierigkeit überwunden. Die bisherigen Fortschritte eröffnen aber für das Weitere gute Aussichten.

EINLEITUNG

Seit B. Riemann vor mehr als hundert Jahren seine berühmte Arbeit "Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite" veröffentlichte, ist es bekannt, dass Kompressionswellen allgemein nach längerer Laufzeit zu Verdichtungsstößen führen, weil die nachkommenden Wellenfronten die vorausseilenden Fronten einholen, was nach einer bestimmten Lauflänge unendliche Dichte-Gradienten bedingt. Dennoch konnte man sich in der Akustik mit der Annahme konstanter Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schallfronten begnügen, weil die Amplituden der Schallwellen in der Akustik so klein sind, dass Verdichtungsstöße erst weit ausserhalb des Interessensgebietes auftreten können. Auch in der Überschall-Aerodynamik begnügte man sich im allgemeinen mit der Annahme konstanter Neigung der Wellenfronten als Folge der Linearisierung der Potentialgleichung in der Strömungsebene. Nun sind

zwar die Störungen auch an den schlanksten Körpern um viele Grössenordnungen höher als in einer Lautübertragung. So lange man sich jedoch nur für den Strömungszustand in der Nähe des Körpers, also in der Nähe des Störzentrums, interessiert, führt die Annahme konstanter Wellenfrontneigungen in erster Ordnung zu keinem Fehler.

Alle mit konstanter Neigung der Wellenfronten arbeitenden Methoden mögen wegen der eben aufgezeigten Zusammenhänge im Folgenden "akustische Theorien" genannt werden, sei es, dass es sich um die instationären Wellen in einem Zeit, Ort-Diagramm handelt, oder sei es, dass die stehenden Wellen in einer stationären Überschallströmung gemeint sind. Die neue Bezeichnung wird deshalb gewählt, weil die "Linearisierung" für diese ältere Theorie nicht kennzeichnend ist. Eine Linearisierung ergibt sich vielmehr auch bei der im Folgenden angewandten Theorie erster Ordnung, wenn schwache Störungen angenommen werden dürfen.

Alle "akustische Theorien" erweisen sich bei genügend grosser Entfernung vom Störzentrum als völlig falsch, weil Ausbreitungsvorgänge ganz wesentlich durch die Einfluss- und Abhängigkeitsverhältnisse bestimmt sind, deren Begrenzung bekanntlich durch die Schallwellenfronten—auch Machlinien (Machflächen) oder Charakteristiken genannt—gegeben ist. Wenn sich bei schwachen Störungen die wirklichen Neigungen der Machlinien oder Machflächen nur wenig von den konstant angenommenen Neigungen der akustischen Theorie unterscheiden, so führt dieser Neigungsunterschied im grossen Abstand vom Störzentrum dennoch zu völlig falschen Ergebnissen. Eines der eindrucksvollsten Beispiele ist aus der ebenen Überschalltheorie bekannt, Fig. 1, wo die akustische Theorie eine gleichbleibende Wellenform bis ins Unendliche angibt, während in Wirklichkeit der Abstand von Kopf- und Schwanzwelle mit der Wurzel aus dem Abstand vom Körper über alle Grenzen wächst und die Stör-Amplitude gleichzeitig mit der reziproken Wurzel abnimmt.

Eine richtige Darstellung der Knallstörung in grosser Entfernung der Flugzeuge, hat also eine richtige Wiedergabe der Wellenfronten zur Voraussetzung, wobei die richtige Darstellung der Expansionsgebiete ebenso wichtig ist, wie jene der Kompressionsgebiete. Denn gerade von den Expansionsgebieten hängt die Schwächung der Stösse ab. Das in Fig. 1 skizzierte ebene Problem wird dabei allerdings keine Rolle spielen. Dagegen ist es fraglich wie weit man sich gestützt auf den Äquivalenzsatz mit der Behandlung von angestellten und nicht angestellten Rotationskörpern und deren Formeinflüssen begnügen kann. Wenn auch von den praktisch weniger wichtigen Flügeln mit Überschallkanten abgesehen wird, so muss doch von Flügeln mit annähernden Schallvorderkanten einerseits und von Rotationskörper andererseits ein wesentlich verschiedenes Verhalten erwartet werden. Die Frage nach dem Knall erscheint

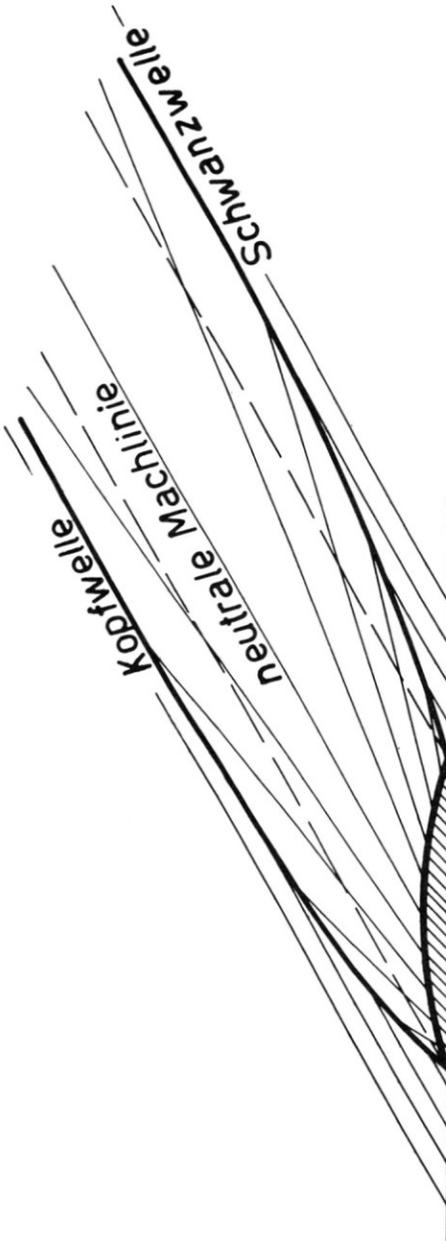


Figure 1. Störung durch ein Profil in Überschallströmung nach der akustischen Theorie (Ackeret) --- und exakt ———.

damit etwa ebenso vielfältig wie die Frage nach den Luftkräften am Körper. Obwohl die Theorie im wesentlichen vorliegt, ist für ihre Auswertung zunächst noch kein Ende abzusehen.

Über einige neuere Resultate kann jedoch bereits jetzt berichtet werden. Wo Resultate von G. B. Whitham [2] bereits vorliegen, haben sich diese durchwegs bestätigt.

GRUNDZÜGE DER NEUEN THEORIE

Die im Folgenden skizzierte Theorie wurde von mir für zwei unabhängige Veränderliche in der Arbeit [5], für die Ausbreitung von Zylinder- und Kugelwellen entwickelt und von W. Schneider [7] auf die stationäre Überschallströmung um nicht angestellte Rotationskörper übertragen. Für die Wellenausbreitung in der Ebene, also für drei unabhängige Veränderliche, habe ich die Theorie in der Arbeit [6] entwickelt. Die Übertragung auf die räumliche stationäre Überschallströmung hat E. Y. C. Sun [9] durchgeführt. Den folgenden Ableitungen sei das Bild einer instationären achsensymmetrischen Strömung zugrunde gelegt, wie es bei der Arbeit von R. Stuff [10] vorliegt. In allen Fällen werden schwache Störungen in ruhender Luft oder in einer Parallelströmung angenommen. Die Neigung der Schallwellenfronten oder charakteristischen Flächen mögen nur wenig von den Neigungen in der ungestörten Strömung abweichen. Diese Annahme bedeutet aber keinesfalls, dass die gestörten und ungestörten Charakteristiken in grosser Entfernung vom Störzentrum nicht beliebig voneinander abweichen dürfen.

Zur Berücksichtigung der richtigen Abhängigkeiten und Einflussgebiete von Ausbreitungsvorgängen sind die Koordinaten der charakteristischen Flächen in der Strömungsebene—das sind also bei uns zwei Ortskoordinaten x , y und die Zeit t —im Strömungsraum zu bestimmen. Da es drei unabhängige charakteristische Flächenscharen gibt, sind also die Ortskoordinaten in Abhängigkeit von drei charakteristischen Koordinaten zu bestimmen: d.h. letztere sind die unabhängigen Veränderlichen, die Ortskoordinaten und die Zeit sind abhängige Veränderliche genauso wie die Geschwindigkeitskomponenten u , v in der Strömung und die Schallgeschwindigkeit c oder die Dichte ρ .

Damit wird in der neuen Methode auf analytischem Weg genauso vorgegangen, wie bei den alten graphischen Charakteristikenmethoden. Bei diesen alten Methoden werden geeignet gewählte Charakteristikenetze mit Hilfe von Neigungsbedingungen in die Strömungsebene hineinkonstruiert und der Strömungszustand gleichzeitig in Abhängigkeit von den charakteristischen Koordinaten bestimmt.

Im räumlichen Falle ist es praktisch, dem Strömungsraum einen Charakteristikenraum gegenüberzustellen. In der ungestörten Strömung sind beide Räume identisch. Die Koordinaten der ungestörten Strömung seien mit x_0 , y_0 und t_0 und die zugehörige Schallgeschwindigkeit sei mit c_0 bezeichnet. Das Tripel x_0 , y_0 , t_0 kann dann auch gleich als Koordinaten des charakteristischen Raumes verwendet werden, Fig. 2 links. Der Zusammenhang zwischen den Charakteristiken und diesen Koordinaten des charakteristischen Raumes ist genau derselbe, wie er schon von der akustischen Theorie her bekannt ist. Die Einfluss- und Abhängigkeitsgebiete eines Punktes in ruhender Luft sind im charakteristischen Raum exakt Kreiskegel und bei gestörter Parallelströmung Kreiskegel, die durch eine Galilei—Transformation verzerrt sind. Bei Einführung von charakteristischen Ebenen kann man beispielsweise das System wählen:

$$\xi = x_0 + \sqrt{3} y_0 + 2c_0 t_0; \quad \eta = x_0 - c_0 t_0; \quad \zeta = x_0 - \sqrt{3} y_0 + 2c_0 t_0 \quad (1)$$

wie es in Fig. 2 zur Erläuterung eingeführt ist. Bei schwachen Störungen erscheint dann das ganze ebene System im Störgebiet verbeult, Fig. 2 rechts.

Auch die Koordinatenflächen des charakteristischen Raumes: $x_0 = \text{konst.}$, $y_0 = \text{konst.}$, $t_0 = \text{konst.}$ erscheinen im Strömungsraum als verbeulte Ebenen. Schon Gl. (1) zeigt, dass man ebenso gut mit den Koordinaten x_0 , y_0 , t_0 des charakteristischen Raumes als unabhängige Veränderliche arbeiten kann wie mit den Variablen ξ , η , ζ . Überhaupt hat die Wahl von Ebenen im charakteristischen Raum als unabhängige Veränderliche keineswegs zur Folge, dass die Einfluss- oder Abhängigkeitsgebiete im charakteristischen Raume durch Ebenen begrenzt sein müssen. Dies ist ebenso wenig der Fall, wie in der akustischen Theorie die Verwendung kartesischer Koordinaten einen Kegel als Einflussgebiet ausschliesst.

Die Lage der charakteristischen Ebenen im Strömungsraum lässt sich aus den Neigungsbedingungen ermitteln, also aus der Aussage, dass sich die Schallwellen mit der lokalen Schallgeschwindigkeit relativ zum Medium fortbewegen. Stellt man die Koordinaten im Raum durch folgende Summe dar:

$$x = x_0 + x_1; \quad y = y_0 + y_1; \quad t = t_0 + t_1 \quad (2)$$

(wobei—wie bereits erwähnt—die Grössen mit dem Index 1: x_1 , y_1 , t_1 keineswegs klein gegenüber den Grössen mit dem Index 0 sein müssen) und nimmt man kleine Geschwindigkeitsstörungen u_1 , v_1 und eine geringe Störung der Schallgeschwindigkeit c_1 an:

$$u = u_1 + \dots; \quad \bar{v} = v_1 + \dots; \quad c = c_0 + c_1 + \dots \quad (3)$$

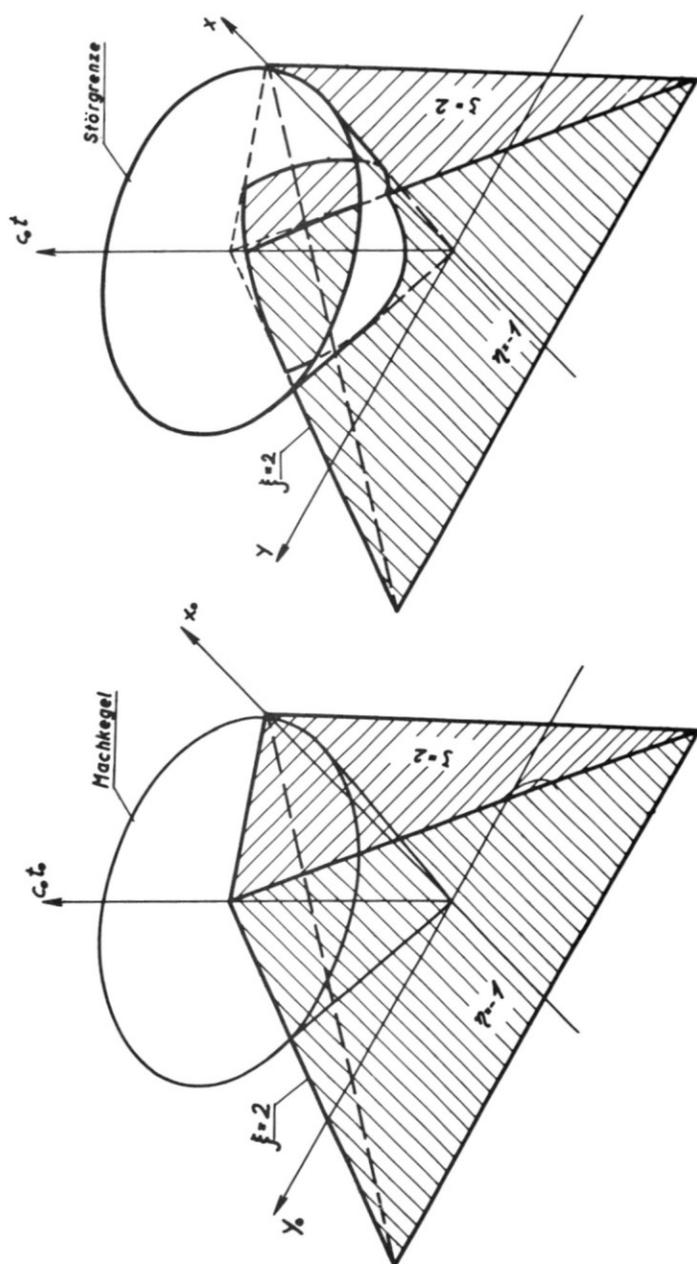


Figure 2. Die charakteristischen Koordinaten im Charakteristikenraum und in Strömungsraum.

so erhält man beispielsweise für die Lage von $\eta = \text{konst.}$ das folgende Integral:

$$x_1 - c_0 t_1 = \int [u_1 + c_1] dt_0 \quad (4)$$

Dabei hat die Integration im charakteristischen Raum, auf einer Geraden $\eta = \text{konst.}$, $y_0 = \text{konst.}$ zu erfolgen, Fig. 3. Ganz allgemein erfolgt die Integration stets längs einer Bicharakteristik, das ist die Erzeugende eines Machkegels. Eine solche gibt es in jedem Punkt, weil ja jede Charakteristikenfläche als Einhüllende von Machkegeln dargestellt werden kann.

Die zu Gl. (4) entsprechenden Bildungen für die ebene stationäre Überschallströmung finden sich bereits in einer Arbeit von C. C. Lin [4] und haben dort formal dieselbe Gestalt. Dennoch ist der Inhalt von Gl. (4)

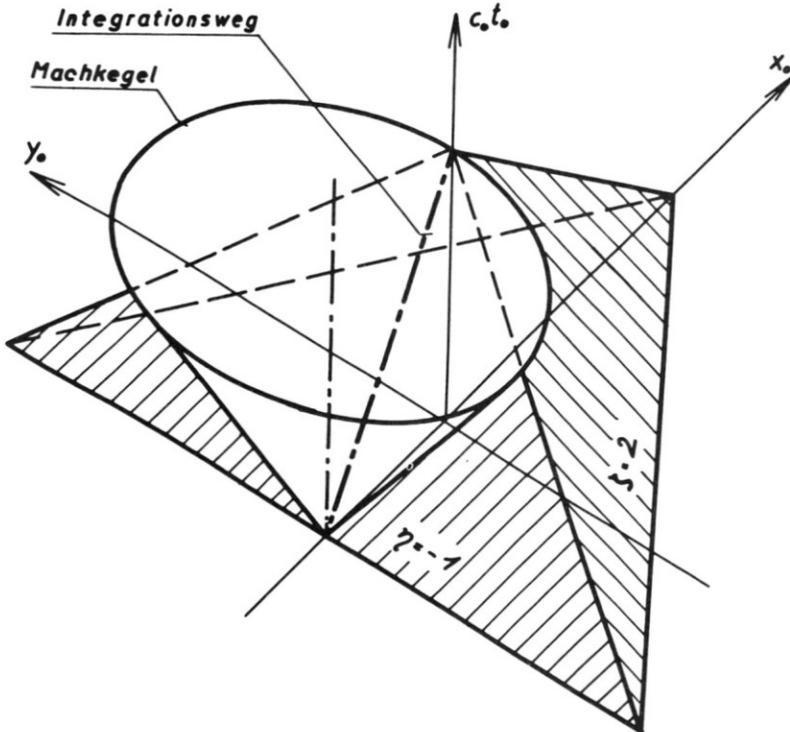


Figure 3. Integrationsweg für Gl. (4).

um vieles weiter, denn u_1 und c_1 sind Lösungen im Raume und die Integration hat im Raume längs einer Bicharakteristik zu erfolgen und würde längs einer anderen Kurve zu falschen Ergebnissen führen. Für das von Lin bearbeitete ebene Problem dagegen existiert eine solche Problematik nicht, weil man es bei diesem nur mit Machlinien und nicht mit Machflächen zu tun hat.

Ein positiver Wert von $x_1 - c_0 t_1$ in Gl. (4) bedeutet einen flacheren Verlauf der rechtslaufenden Welle $\eta = \text{konst.}$, ein negativer Wert von $x_1 - c_0 t_1$ einen steileren Verlauf. Ein positiver Integrand in Gl. (4), wie er etwa durch eine positive Geschwindigkeit ($u_1 > 0$) verbunden mit einer Schallgeschwindigkeitserhöhung ($c_1 > 0$) vorliegt, führt damit zu einem Zusammenlaufen der Ebene $\eta = \text{konst.}$ mit den entsprechenden Ebenen des ungestörten Gebietes, ein negativer Wert von $u_1 + c_1$ zu einer Auffächerung gegenüber dem ungestörten Feld. Im ersten Falle kommt es im allgemeinen mit der Zeit zu einer Überfaltung im Strömungsraum, d.h. zu einem Stoss, im letzteren Fall zu einer verallgemeinerten Prandtl-Meyer-Expansion. Der Stoss kann nachträglich in die Überfaltung hereingelegt werden, was sowohl auf graphischem wie auf analytischem Wege geschehen kann, Fig. 4. Bei der Prandtl-Meyer-Expansion dagegen kann unter Umständen ein Problem dadurch entstehen, dass der Strömungsraum im Expansionsgebiet "aufgerissen" ist, d.h. es fehlt zwischen zwei divergenten Machschen Linien des Expansionsgebietes die Lösung. Dieser Schwierigkeit wurde inzwischen von W. Schneider [7] begegnet. Im übrigen decken sich die Resultate Schneiders, dessen Arbeit auch Fig. 4 entnommen wurde, ganz mit den Stossformeln Whithams [2], was insofern einen Fortschritt darstellt, als Whithams Theorie wie M. J. Lighthill [3] andeutet, stark intuitiv aufgebaut ist, während die neue Methode die Berechnung höherer Näherungen zulässt, die offensichtlich konvergieren [7], S. 40 ff.

In Gl. (4) und den übrigen hier nicht wiedergegebenen Neigungsgleichungen sind die Lösungen, d.h. u_1 , v_1 und c_1 , als Funktionen von x_0 , y_0 und t_0 oder ξ , η , ξ , Gl. (1), vorausgesetzt.

Daraus entspringt aber im allgemeinen bei Problemen des Knalles keine Schwierigkeit. Es zeigt sich nämlich, dass bei drehungsfreier Strömung mit schwachen Störungen im Charakteristikenraume in erster Näherung genau jene Lösung gilt, die von der "akustischen Theorie" her bekannt ist. Es kommt also nur auf die Übertragung der Rand- und Anfangsbedingungen vom Strömungsraum auf den charakteristischen Raum an. Dabei tritt nur dann eine besondere Problematik auf, wenn die akustische Theorie versagt, also beispielsweise bei gewissen Problemen der Schallnähe wie der Schallkanten. Gerade im letzteren Falle sind aber bereits einige Erfolge zu verzeichnen, indem es z.B. gelungen ist, auch Strömungen um Flügel mit Schallvorderkanten zu berechnen [9].

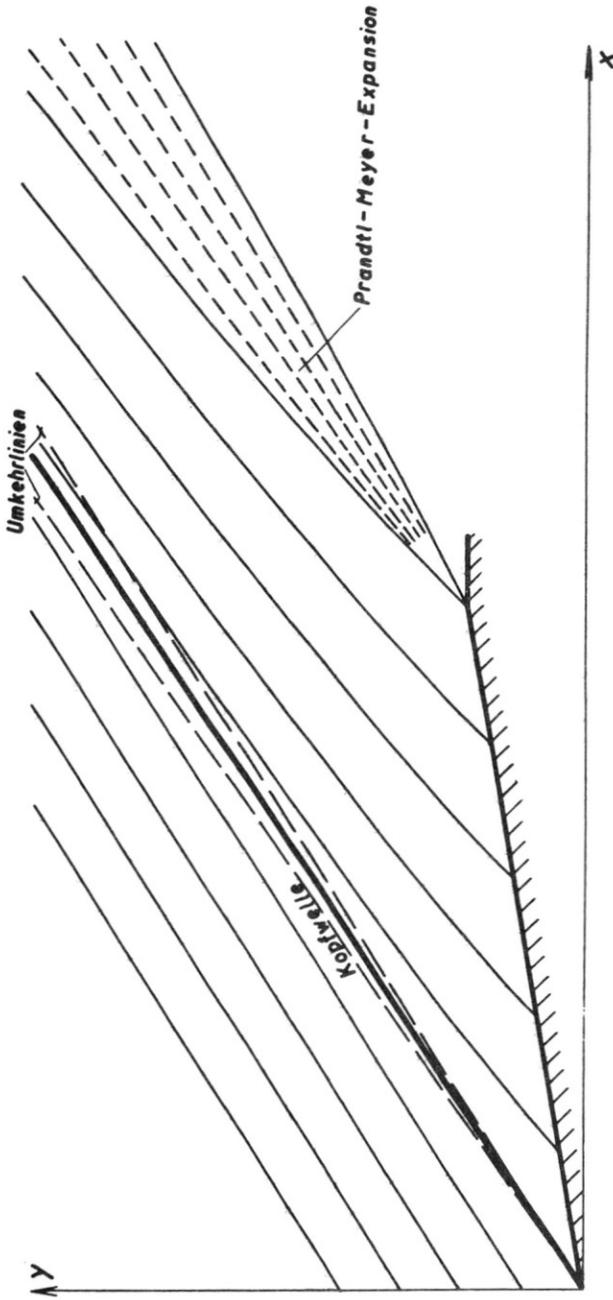


Figure 4. Faltung oder Stoss und Expansion bei stationärer Überschallströmung.

DIE KOPFWELLE BEI SCHALLVORDERKANTEN

Bei Flügeln mit Schallvorderkanten sind besonders intensive Kopfwellen zu erwarten. Während nämlich die Störung bei einem schlanken Rotationskörper bis zur Kopfwelle bereits stark abgeklungen ist, haftet der Kopfwelle bei Schallvorderkanten etwas vom ebenen Problem an, bei dem bekanntlich die gesamte Störung an der Vorderkante in den Stoss verlagert ist. Nach E. Y. C. Sun [9] ergibt sich bei einem kegeligen Körper vom Querschnitt eines Rhombus, Fig. 5, *in der Ebene* des Flügels die Formel:

$$\frac{dp}{p} = \frac{6\kappa(\kappa + 1) M_\infty^6 (\tau\sigma_0)^2}{\pi^2(M_\infty^2 - 1)(1 - \sigma_0^2 \cot^2 \alpha)} \quad (5)$$

und *quer zur Flügelsebene*, wo die Knallstörung besonders interessiert:

$$\frac{dp}{p} = \frac{6\kappa(\kappa + 1) M_\infty^6 (\tau\sigma_0)^2}{\pi^2(M_\infty^2 - 1)} \quad (6)$$

Hierin ist κ das Verhältnis der spez. Wärmen, M_∞ die Machzahl der Anströmung und α der dazu gehörige Machwinkel, τ der Tangens des halben Öffnungswinkels eines Längsschnittes und σ_0 die Pfeilung der Vorderkante im *Charakteristikenraum*.

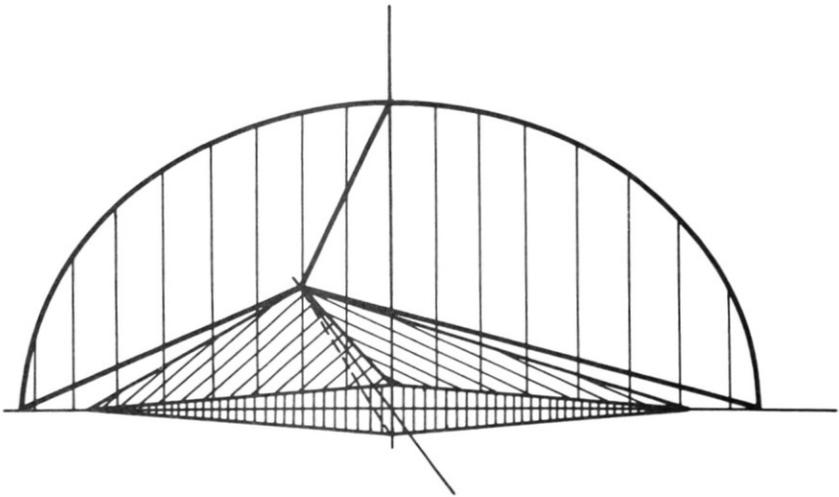


Figure 5. Kopfwelle am Rhombuskegel mit Schallvorderkante.

Für den Flügel *kleiner* Streckung, $\sigma_0^2 \cot^2 \alpha \ll 1$ kann die Pfeilung im Charakteristikenraum der Pfeilung σ in der Strömungsebene gleichgesetzt werden. In diesem Falle ist der Drucksprung im Stoss in erster Ordnung in beiden Ebenen gemäss Gl. (5) und (6) gleich. Ausserdem zeigt ein Vergleich mit dem Drucksprung in der Kopfwelle des äquivalenten Rotationskegels [2], oder [7] ebenfalls Übereinstimmung, wie das nach dem Äquivalenzsatz zu erwarten ist.

Bei mittlerer Streckung $\sigma \cot \alpha \sim 1$, ist bemerkenswerter Weise die Druckstörung im Stoss in der Ebene senkrecht zur Flügelebene noch immer gleich jener in der Kopfwelle des äquivalenten Rotationskegels, gemäss Gl. (6)! In Gl. (5) für den Drucksprung in der Kopfwelle in der Flügelebene darf bei schallnahen Vorderkanten nun aber σ_0 nicht mehr durch σ ersetzt werden. Die gültige Beziehung gibt E. Y. C. Sun [9] an. Aus seiner Formel folgt für z.B. *Schallkanten*, $\sigma \cot \alpha = 1$:

$$[1 - \sigma_0^2 \cot^2 \alpha]^{3/2} (M_\infty^2 - 1)^{3/2} = \frac{4}{\pi} \frac{\kappa + 1}{2} M_\infty^4 \tau \quad (7)$$

Dies in Gl. (5) eingesetzt, liefert für den Drucksprung im Stoss vor der Schallkante:

$$\frac{dp}{p} = \frac{6}{2^{4/3}} \frac{1}{\pi^{2/3}} \frac{\kappa}{(\kappa + 1)^{1/3}} (M_\infty \tau)^{2/3} \quad (8)$$

Die Beziehung zum Dickenverhältnis τ ist also dieselbe wie in der Profiltheorie bei Schallanströmung! Ausserdem sei vermerkt, dass $M_\infty \tau$ auch als Hyperschallparameter gedeutet werden kann. Die Resultate [9] für den Deltaflügel schliessen ja hohe Machzahlen nicht aus.

Für den Überschallknall bedeuten die Ergebnisse dieses Abschnittes, die ja nur in Körperrnähe gelten, nur einen Anfang. Es wird zu erforschen sein, wie sich die Anstellung bei Flügeln mit Schallkanten und wie sich die Schallkanten überhaupt auf den Knall in grosser Entfernung vom Flugzeug auswirken.

Die Berechnung von Körpern mit Schallvorderkanten wurde bei uns in erster Linie mit dem Ziel der Berechnung der Luftkräfte verfolgt. Einer Berechnung der Knallwirkung in grosser Entfernung stehen aber keine wesentlichen Schwierigkeiten entgegen.

KNALL DURCH BESCHLEUNIGUNG ODER VERZÖGERUNG VON FLUGZEUGEN

Eine anschauliche Darstellung dieser Frage hat bereits L. Prandtl im Jahre 1938 gegeben [1]. Dieser Arbeit ist Fig. 6 entnommen, die allerdings einer gewissen Korrektur bedarf, weil die Schwanzwelle fehlt.

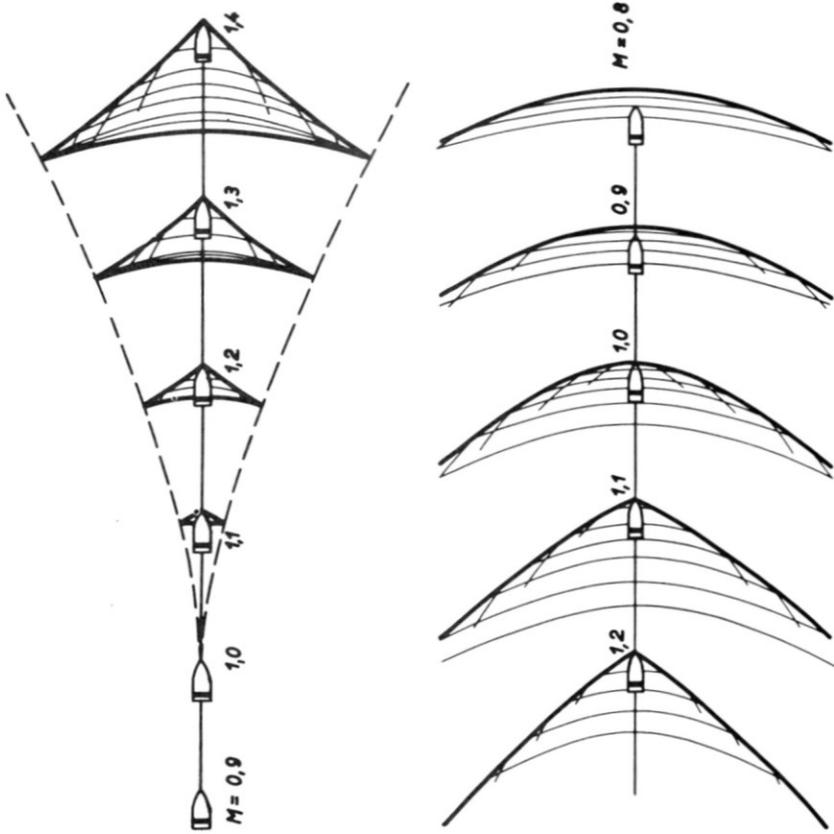


Figure 6. Stosswellen am verzögerten und beschleunigten Objekt nach L. Prandtl [1].

Wie aus den einleitenden Ausführungen hervorgeht, ist die Berechnung der Stosswellen heute im Rahmen unserer Methode auch im Falle der Beschleunigung oder der Verzögerung im wesentlichen eine Angelegenheit der Routine, aus der sich die Verdichtungsstöße ohne zusätzlichen Annahmen ergeben. An Stelle der akustischen Lösungen können dieselben Formeln in den charakteristischen Raum übernommen werden, wobei wie in den älteren Arbeiten schwache Verzögerungen oder Beschleunigungen angenommen werden dürfen. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf die Umgebung der Flugrichtung in einiger Entfernung vor oder hinter dem Flugzeug, das eine gerade Bahn bei konstanten Anströmzuständen fliegen möge.

Einen Einblick für den beschleunigten Flug liefert Fig. 7. Dabei ist ein mit der Luft ruhendes Bezugssystem gewählt und die Machflächen sind im Gegensatz zum System (1) mit

$$\xi = x_0 + c_0 t_0; \quad \eta = x_0 - c_0 t_0 \quad (9)$$

bezeichnet. Die Störungen ergeben sich dann in bekannter Weise aus der Theorie des retardierten Potentials. Der Ursprung ist—wie auch in Fig. 8—in den Schallpunkt verlegt, so dass das Flugzeug bei $t_0 < 0$ mit Unterschall, bei $0 < t_0$ mit Überschallgeschwindigkeit fliegt.

Das Gebiet I wird von den linkslaufenden Abstrahlungen des Flugzeuges überstrichen, das Gebiet II von den dem Unterschallflug vorauslaufenden, das Gebiet III von den dem Überschallflug nachhinkenden rechtslaufenden Wellen.

Eine kleine Schwäche der Theorie liegt nur im unstetigen Übergang der Unterschalllösung zur Überschalllösung auf $\eta = 0$. Doch ist anzunehmen, dass dieser Übergang in der Nähe des Flugzeuges zwar nicht unstetig dennoch aber sehr steil ist, so dass die Stöße, welche sich aus der Überfaltung in der Umgebung dieser Charakteristik ergeben, durchaus der Wirklichkeit entsprechen dürften.

Nach R. Stuff [10] erhält man für das Potential in einiger Entfernung vom Körper z.B. im Bereich I: den Ausdruck:

$$\phi = \frac{c_0 V l}{4\pi} \left[\frac{M_s}{(x_{0s} - x_0)^2 (1 + M_s)^2} + \frac{B_s}{(x_{0s} - x_0) (1 + M_s)^3} \right] \quad (10)$$

dabei ist V und l Volumen und Länge des Körpers, x_{0s} , M_s und B_s die Lagekoordinaten, die Machzahl und die Beschleunigung des Körpers im Zeitpunkt der Ausstrahlung der Störung.

Das Produkt $(x_{0s} - x_0)(1 + M_s)$ kann als Abstand des Aufpunktes vom Körper gedeutet werden, wenn dieser unbeschleunigt weiter geflogen wäre.

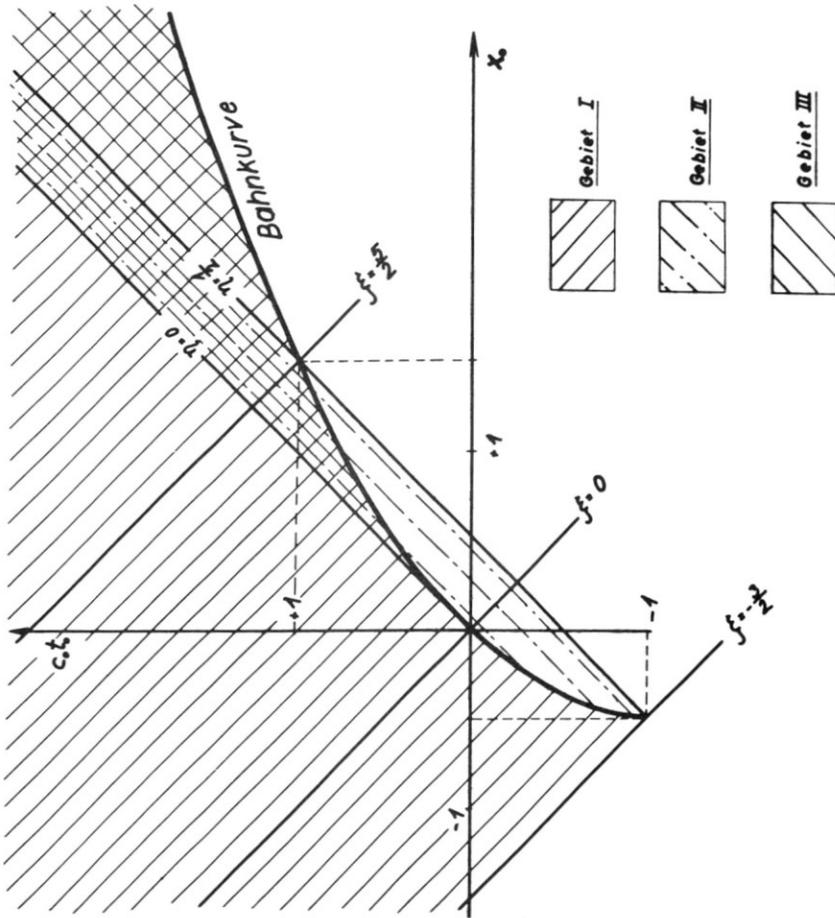


Figure 7. Zeit, Weg—Diagramm bei Beschleunigung.

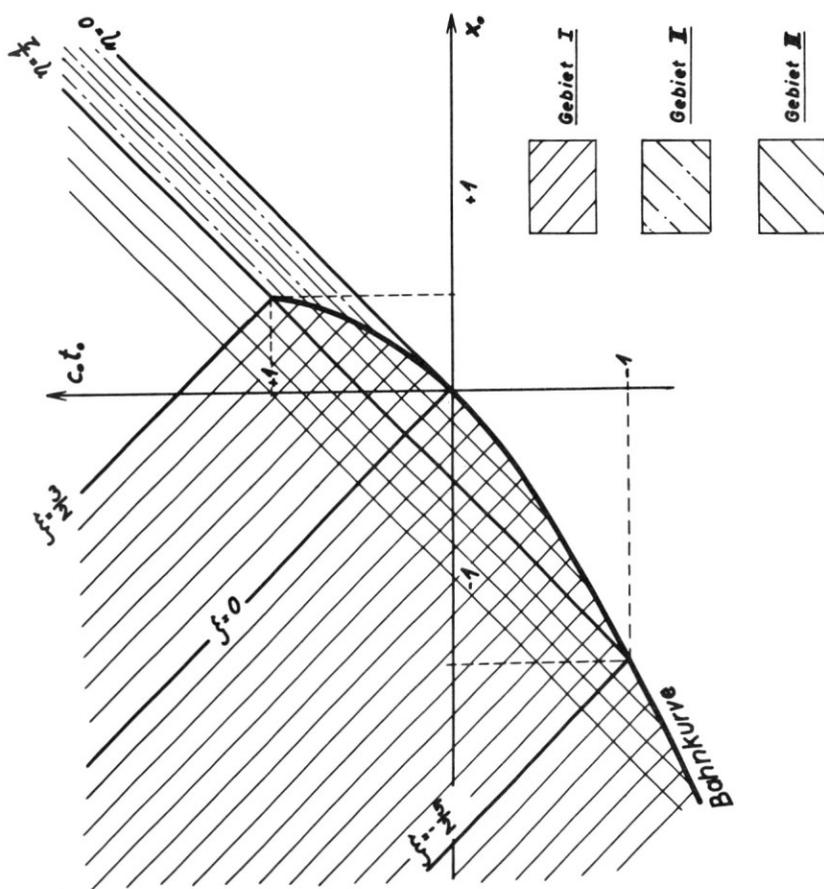


Figure 8. Zeit, Weg—Diagramm bei Verzögerung.

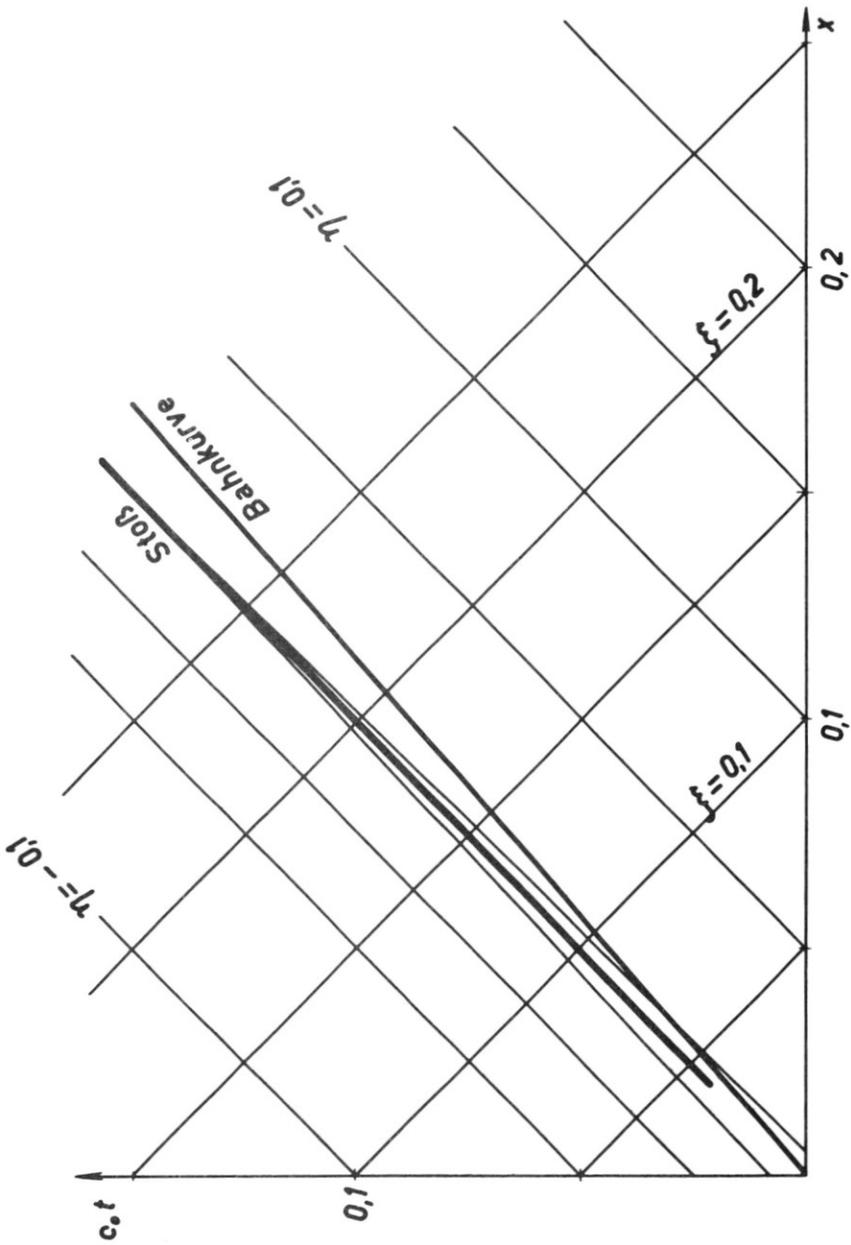


Figure 9. Bahnkurve der abgelösten Stosswellenfront bei Beschleunigung.

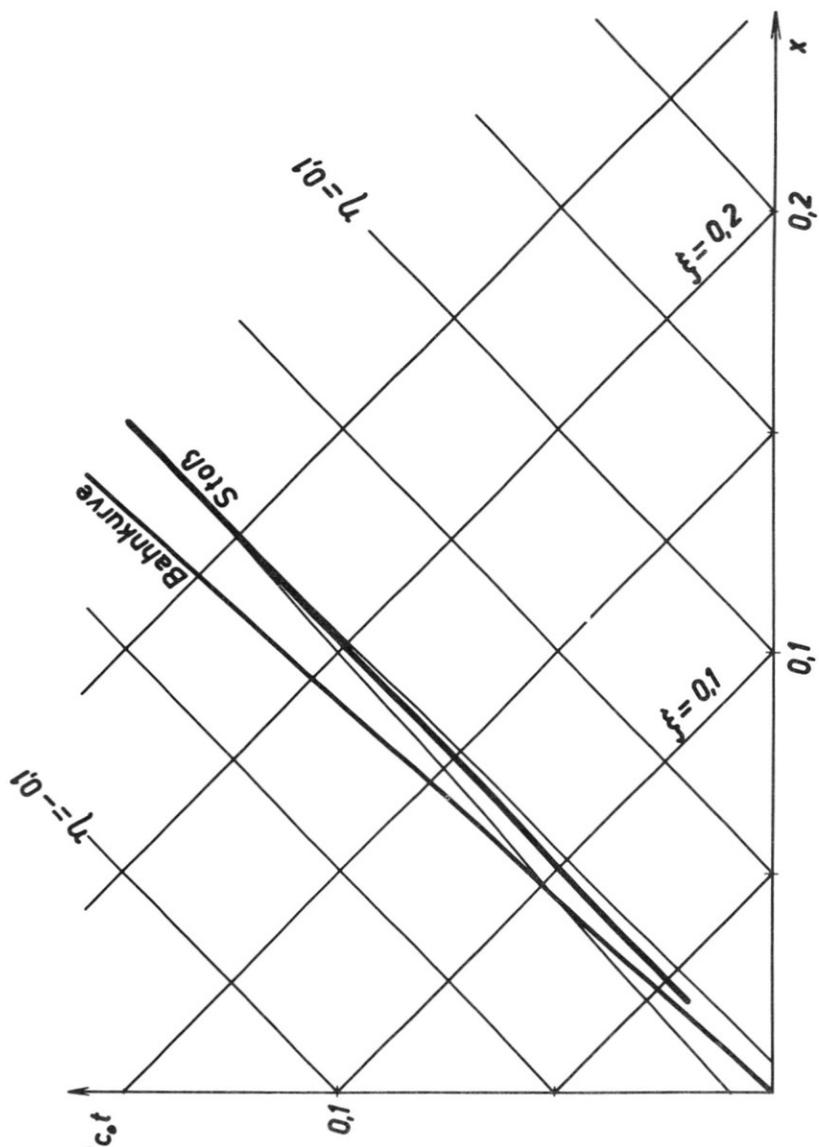


Figure 10. Bahnkurve der abgelösten Stosswellenfront bei Verzögerung.

Man erkennt im ersten Summanden von Gl. (10) das Potential eines nicht beschleunigten Fluges, das bei Rotationskörpern bekanntlich mit dem Quadrat der Entfernung abnimmt. Das Beschleunigungsglied, der zweite Summand von Gl. (10), dagegen, hat genau den Charakter einer Kugelwelle, die bekanntlich mit der ersten Potenz der Entfernung vom Quellpunkt abklingt. Es leuchtet ein, dass die Stärke dieser Kugelquelle proportional dem Volumen und der Beschleunigung ist. Ferner zeigt Gl. (10), dass das Beschleunigungsglied in grosser Entfernung stets den ersten, "quasistationären" Beitrag, überbietet. Da M_s , x_{0s} und allenfalls auch die Beschleunigung B_s Funktionen der Zeit sind, ist die Aufteilung der beiden Summanden von (10) nach einer Differentiation zum Zwecke der Bildung von u_1 , v_1 und c_1 eine andere.

Grundsätzlich kann eine solche beschleunigte oder verzögerte Bewegung selbst bei reiner Unterschallströmung in manigfacher Weise zu kleineren Stössen führen, die vielleicht nur zu schwach sind, um beobachtet worden zu sein. Als typische Stossgebiete erweisen sich jedoch Gebietsgrenzen, an denen Druckanstiege auftreten. Das ist in Fig. 7 die Linie $\eta = 0$, an der zur linkslaufenden Unterschallabstrahlung, plötzlich eine rechtslaufende Unter- und Überschallabstrahlung hinzutritt. Auch in Fig. 8 tritt längs $\eta = 0$ zur Ruhe plötzlich die rechtslaufende Unter- und Überschallabstrahlung auf. Im letzteren Falle handelt es sich um Überdrucke, im ersteren Fall um Unterdruck, in beiden Fällen um Druckanstiege in der Welle, die in der Strömungsebene theoretisch zu Überfaltungen und damit zu Stössen führen, wie sie in Figs. 9 und 10 wiedergegeben sind. Im Gegensatz zu Fig. 6 handelt es sich um eine abgelöste Welle des Gesamtobjektes und nicht um einen nur mit dem Objektkopf zusammenhängenden Effekt. R. Stuff, von dem die Figuren 7 bis 10 stammen [10], hat eine genauere Analyse für Körpernähe vorgesehen, mit der wir Einzelheiten nicht nur über die abgelösten Wellen in Körpernähe, sondern auch über die anliegenden Wellen ermitteln zu können hoffen.

REFERENCES

1. Prandtl, L., "Über Schallausbreitung bei rasch bewegten Körpern" (Vortrag Deutsche Akad. Luftfahrtforschung, 1938) Ges. Abhandl. (Springer, 1961), pp. 1059-1070.
2. Whitham, G. B., "The Flow Pattern of a Supersonic Projectile," *Com. Pure and Appl. Math.* (1952), p. 301.
3. Lighthill, M. J., "Higher Approximations," in W. R. Sears, *General Theory of High-Speed Aerodynamics* (Princeton, 1954), p. 428.
4. Lin, C. C., "On a Perturbation Theory Based on the Method of Characteristics," *J. Math. Phys.*, 33 (1954), pp. 117-134.

5. Oswatitsch, K., "Das Ausbreiten von Wellen endlicher Amplitude," *Z. Flugwissenschaften*, 10 (1962), pp. 130-138.
6. ———, "Die Wellenausbreitung in der Ebene bei kleinen Störungen," *Archivum Mechaniki Stosowanej*, Warschau 3/4, 14 (1962), pp. 621-637.
7. Schneider, W., "Analytische Berechnung achsensymmetrischer Überschallströmungen mit Stößen," *DVL-Bericht*, no. 275, Dissertation, 1963.
8. Rothmann, H., "Analytische Unterordnung der Ausbreitung von Kugel- und Zylinderwellen," *DVL-Bericht*, no. 280 (1963).
9. Sun, E. Y. C., "Nicht angestellte Deltaflügel mit Unterschall und Schallvorderkanten," *Journal de Mecanique* (in Druck).
10. Stuff, R., "Der Stosswellenknall in grosser Entfernung von beschleunigten oder verzögerten Rotationskörpern" (in Arbeit).

COMMENTARY

P. THEODORIDES (*Consulting Engineer, Silver Spring, Md.*): In Ihrem glänzenden Referat haben Sie, Herr Kollege, auf vermisste Schwanzwellenbeiträge, in den projizierten Prandtl Bildern über Kopfwellaufbau, hingewiesen. Nun würde die Frage nahe liegen, inwiefern Ihre neueren Forschungen über Stosswellenknall eine Abschätzung der Schwanzwellenanteile bezogen auf die Prandtl'schen Kopfwellenwirkungen ermöglichen.

REPLY

Wir beabsichtigen und hoffen, mit unserer Theorie ein genaues Bild von der Stosswellenentwicklung einschliesslich der Schwanzwelle zu gewinnen. Das Bild von Prandtl dürfte nur für Körper starker Dickenvorlage gelten, wo dann die Stärke der Kopfwelle jene der Schwanzwelle weit übertrifft. Ich möchte annehmen, dass sich die senkrechte Stosswelle bei Beschleunigung zuerst am Körper bildet und dann nach hinten abwandert. In diesen abschliessenden Stoss dürften im weiteren Verlauf sowohl Kopf- wie Schwanzwelle einmünden. Vielleicht werden wir von der Theorie aber noch eines anderen belehrt.